# EL VALOR DE π SEGÚN VICENTE BERRIZ

*Juan Navarro Loidi*
*jnavarrolo@gmail.com*

## 1.- Introducción[1].

En 1798 el Director General de Artillería envió a los profesores del Colegio de Artillería de Segovia un documento[2] elaborado por el teniente de artillería Vicente Berriz en el que hallaba el valor de "la razón del diámetro a la circunferencia" [3]. Aunque el autor habla todo el tiempo de determinar la razón del diámetro a la circunferencia y dice que la cuadratura del círculo es imposible, se le puede considerar un "cuadrador" más en una época en que el problema estaba ya desprestigiado. Para esas fechas ya se suponía que la cuadratura del círculo era imposible y los "cuadradores" comenzaban a cansar con sus propuestas a los matemáticos. Medio siglo antes, en 1754, Jean Etienne Montucla publicó *Histoire des Recherches sur la Quadrature du Cercle* relatando los intentos realizados para resolver ese problema y en el mismo título ya sugería que él lo consideraba imposible cuando ponía que su libro debía "*servir de préservatif contre de nouveaux efforts pour le résoudre*"[4].

1 Este artículo desarrolla la comunicación presentada en la "Taula 10. Noves qüestions al voltant de l'algebrització des del segle XVI al XVIII" de la XVII Trobada d'Història de la Ciència i la Tècnica (Palma, Mallorca 2022). Agradezco a los participantes sus comentarios.

2 El texto de la propuesta de Berriz, la contestación de los profesores del Colegio de Artillería de Segovia, las nuevas explicaciones dadas por Berriz y otros escritos intercambiados en esta polémica se encuentran junto con la Hoja de servicio de Vicente Berriz en el Archivo General Militar de Segovia (AGMS, Hojas de servicio B-2130). De ese texto proviene todas las citas de Berriz. Agradezco al profesor Juan Luis García Hourcade que me consiguiera una copia de ese documento.

3 Es decir, pretendía calcular el valor de 1/π. Aunque Berriz siempre lo llama "la razón del diámetro a la circunferencia" para abreviar se va a utilizar el símbolo moderno π para la razón de la circunferencia a su diámetro. Parece normal que Berriz no utilizara π para dicha razón, según CAJORI (1993, v. 2, 8-13) el inglés W. Jones fue el primero en utilizarlo en 1706 con ese significado y su uso se generalizó más tarde cuando Euler lo adoptó. Pero Berriz podía haber utilizado formas menos prolijas de expresarlo y emplear "p/2r" para π como su profesor GIANNINI (1795, 199) o cualquier otra similar.

4 "Servir como preservativo contra nuevos esfuerzos para resolverlo". Las traducciones son

El cálculo de Berriz es uno más de esos intentos erróneos de hallar el valor de π, pero su razonamiento se basa en criticar el cálculo diferencial y probablemente por eso consiguió darlo a conocer.

## 2.- Vicente Berriz (1755- post. 1820)[5].

Por su hoja de servicios se sabe que el 13 de septiembre de 1781 entró en la artillería como artillero distinguido, es decir, de origen noble. El año siguiente era ya cabo y fue aceptado en el Colegio de Artillería de Segovia. No entró como cadete, era demasiado mayor, sino como cabo distinguido. Es decir, iba a clase y tomaba parte en los exámenes, pero ni vivía en el Alcázar, ni participaba en otras actividades del Colegio. Además, seguía teniendo obligaciones militares, que podían impedirle asistir a clase.

Las materias que estudió y las notas que tuvo se pueden saber por las *Actas*[6] de los consejos extraordinarios para exámenes del Colegio. En resumen, fueron:

| | | |
|---|---|---|
| Agosto de 1782 | Aritmética | Sobresaliente |
| Diciembre 1782 | Aritmética y principios de geometría | Bueno |
| Agosto de 1783 | Los seis primeros libros de geometría | Bueno |
| Diciembre 1783 | Los libros 11 y 12 de los *Elementos* de Euclides, trigonometría, secciones cónicas y geometría práctica | Bueno |
| Julio de 1784 | Primera mitad de álgebra | Bueno |
| Diciembre 1784 | Segunda mitad de álgebra | Bueno |
| Julio de 1785 | Cálculos diferencial e integral | No evaluado |
| Diciembre 1785 | Fortificación | Sobresaliente |
| Diciembre 1785 | Mecánica | Sobresaliente |

Sus notas son buenas. Muy buenas incluso teniendo en cuenta que los alumnos artilleros distinguidos del Colegio no dejaban de tener sus quehaceres como soldados. De hecho, Berriz fue el único artillero distinguido que

del autor, salvo cuando se diga otra cosa.

5 Para la vida de Berriz se puede consultar AGMS Hojas de servicio B-2130, y la entrada "Berriz, Vicente (Sevilla, h. 1756 - ?)" en GIL NOVALES (2010, 403-404).

6 *Actas* (v. 2, f. 389 r. 397 r. 406 v. 415 v. 423 v, 434 v. 441 r, y 441 v,)

acabó los estudios de la docena que los empezó en esa década.

En 1786 sus compañeros cadetes siguieron estudiando artillería, teórica y práctica. Berriz dejó el Colegio, fue nombrado subteniente en septiembre de 1786, y se le destinó a reforzar la guarnición de la Isla de Trinidad en el Caribe hacia la que salió a finales de 1786, junto a su criado, dos sargentos, cuatro cabos, un tambor y 14 artilleros.

Fue en la Isla Trinidad donde ideó su solución al problema de hallar la razón del diámetro a la circunferencia. Trató de darla a conocer y consiguió que el gobernador de la isla organizara un acto donde la explicó a las autoridades y personal interesado. Pero no se atrevió a enviarla a España para que se publicara porque temía que le robaran la autoría.

En 1797 la armada inglesa atacó la isla con fuerzas superiores y la guarnición española se rindió el 17 de febrero 1797. En la capitulación se estipulaba que los oficiales españoles quedaban libres si volvían a Europa. Berriz llegó a Cádiz el 27 de junio de 1797 y ese mismo día escribió al Inspector General de Artillería, conde de Revillagigedo, pidiendo permiso para pasar a Segovia a discutir su descubrimiento matemático con los profesores del Colegio de Artillería. No le concedieron esa licencia y entonces solicitó que el Inspector General hiciera llegar su propuesta al Colegio de Segovia para que la valoraran los profesores. Esta segunda petición fue aceptada, y el 12 de septiembre de 1798 Berriz mandó su dosier a Revillagigedo que lo remitió a Segovia por vía oficial.

En Sevilla Berriz continuó su carrera militar y ascendió a capitán en 1799, y fue destinado al sexto batallón; en 1802 pasó a la compañía de obreros de la Maestranza de Sevilla, y en 1804, a las compañías fijas de Andalucía. En 1806 fue nombrado teniente coronel del cuerpo y director de las minas de carbón de piedra de Villanueva del Río (Sevilla).

En la Guerra de la Independencia estuvo destinado en la fundición de Sevilla y cuando las tropas francesas tomaron la ciudad pasó a las filas de José I, continuando en la fundición de Sevilla a su servicio. También se le encargó la organización de una Academia de Artillería que quiso poner en marcha José I. Cuando los franceses abandonaron Sevilla tuvo que dejar el arma de artillería por afrancesado. En abril de 1820, quiso recuperar su plaza en el cuerpo, pero el rey se lo negó el 19 de junio de 1820 y no se tienen noticias posteriores de su vida.

No se ha encontrado ningún escrito posterior de Berriz sobre la cuadratura o, en general, sobre matemáticas. Parece que se inclinó por la astronomía y publicó en 1815 *El equilibrio absoluto. Sistema del Universo*, libro en el que por medio de un diálogo entre un aficionado y un filósofo se pretende resolver todos los problemas del sistema solar sin escribir una fórmula.

## 3.- El cálculo de π según Berriz.

Berriz envió al Inspector General el dosier con su solución al problema de hallar la relación del diámetro a la circunferencia junto con una carta explicando los pasos que había dado para darla a conocer, en la que le decía que su cálculo "en caso de ser aprobado es de mucha consideración".

El documento que envió Berriz al Colegio con sus teorías se titula: "Disertación sobre la naturaleza de las líneas curvas y determinación de la razón del diámetro a la circunferencia del círculo escrita por el teniente del Rl. cuerpo de artillería Vicente Berriz". Tiene 34 páginas y está dividido en tres partes. La primera es una "Advertencia" que solo ocupa una cara y en la que introduce el problema que va a resolver y el método que utiliza. La segunda parte se titula "Disertación", ocupa 24 páginas y está dividida en 71 puntos, y en ella explica y fundamenta los postulados que luego toma para resolver el "Problema", que es la parte final y solo ocupa 9 páginas y es donde halla su valor de π. El problema es la única parte que tiene cálculos matemáticos y está dividida en proposiciones, demostraciones, escolios, y corolarios. Tiene además tres páginas de figuras.

Desde el comienzo de la disertación Berriz plantea que todos los cálculos realizados con anterioridad para hallar el valor de π son falsos y que la razón de que lo sean es que se aproxima la circunferencia con segmentos de recta:

> *"7. Se ha supuesto hasta ahora (y en esa suposición proceden los cálculos llamados superiores o teoría de los infinitamente pequeños) que los elementos o infinitesimales de una línea curva son, o pueden considerarse rectos; […] lo cual es en substancia desterrar la idea de curvatura, y suponer las curvas unos polígonos de infinitos lados."*

Para Berriz esa consideración es "absolutamente falsa" porque en su opinión "la curvatura es un atributo esencial de origen indestructible, por consecuencia existente en la más pequeña porción de una curva". Además, una curva que une dos puntos siempre es más larga que la recta que los une, por lo que con ese cambio siempre se obtienen longitudes menores a las reales. Esta sustitución, según Berriz, tampoco es válida si se trabaja con infinitésimos, que para él son:

> *"9. Llamamos elementos o infinitesimales de una cantidad unas (a nuestro modo de apreciar) pequeñísimas cantidades de su misma especie, de que las consideramos compuestas, las cuales imaginándolas / tan pequeñas como nuestro entendimiento alcanza decimos ser infinitamente pequeñas".*

Berriz dice que son pequeñísimas cantidades, pero les otorga una "especie". No son pequeñísimas cantidades de longitud o superficie sino de una curva. Para Berriz un infinitésimo es un arco que tiene una longitud muy pequeña. Por eso dice que "nuestros elementos infinitesimales de una línea curva han de ser curvos, con una curvatura de la misma ley que una porción finita de la misma curva de que son parte; principal fundamento de mi teoría".

Su idea de cantidad o magnitud es diferente a la comúnmente admitida, que relaciona cantidad con número y puede tener unidades, pero no tiene forma[7]. Sin embargo, para Berriz una cantidad infinitesimal tiene forma y la de una circunferencia debe ser curva.

Un segundo problema de los infinitésimos de Berriz es que nunca se pueden anular, o dicho con su perspectiva geométrica, reducirse a un punto. Según Berriz, un infinitésimo "tiene aún una posibilidad de ser disminuida, o lo que es lo mismo tiene aun una extensión, como es indispensable para que muchas de estas cantidades juntas formen lo que llamamos una cantidad finita". Si los infinitésimos se redujeran a un punto no podría reconstruirse la curva de la que proceden. La disminución tal y como la plantea Berriz no tiene límite "resulta que lo que llamamos infinito no es sino indefinido, y por lo tanto cuando consideramos una cantidad disminuida hasta ese punto tiene aún una posibilidad de ser disminuida". Para Berriz Aquiles nunca atraparía la tortuga.

Como la línea curva matemática es curva en todas sus partes, "es de una naturaleza distinta de la recta, con la cual no puede tener un segmento en común", y son erróneos todos los cálculos para cuadrar un círculo o rectificar la circunferencia que se basen en aproximarlo por medio de segmentos rectos

7 En el Diccionario de la Real Academia Española se da como definición de "cantidad": "1. f. Porción de una magnitud. 2. f. Cierto número de unidades" o en matemáticas "6. f. Mat. Número que resulta de una medida u operación" https://dle.rae.es/cantidad (6-4-2023).

y medir dichos segmentos, porque se desprecia la curvatura. En particular el método de los infinitésimos lleva a ese error:

> *"26. Síguese asimismo que la teoría de los infinitamente pequeños aplicada a la rectificación de curvas y medidas de la superficies curvilíneas es igualmente insuficiente, pues camina sobre el mismo principio de suponer rectos los elementos de las tales líneas y por lo tanto su método se reduce a considerar un polígono de infinito número de lados inscrito y medir su perímetro o su área".*

Para Berriz el que se consideren infinitos segmentos infinitesimales rectos no cambia el resultado porque "conduce a tener infinitas diferencias a añadir y al fin vendrá a resultar que infinitas diferencias infinitamente pequeñas harán una cantidad finita no despreciable". Obviamente, no hace ningún cálculo para demostrarlo.

Berriz también conocía la forma de introducir el cálculo diferencial de Newton, más próxima a la idea de límite, pero opinaba que tiene los mismos defectos:

> *"48. Pasemos ya a la theoria de los infinitamente pequeños, método, como queda dicho el mas ingenioso de cuantos se han imaginado […]*
> *49. La expresada teoría está fundada en las dos proposiciones siguientes:*
> *1ª Si dadas dos magnitudes desiguales de la mayor se quita una parte mayor que su mitad, o su mitad, del residuo lo mismo, y así continuando cuanto convenga, llegará a resultar una cantidad menor que la menor propuesta.*
> *2º Las magnitudes y las razones de las magnitudes que continua y constantemente se aproximan hasta que su diferencia venga a ser menor que cualquier cantidad asignable son finalmente iguales."*

Para Berriz la teoría de los infinitésimos es la más ingeniosa que hay, pero él le ha encontrado errores. De las dos proposiciones que da como su fundamento, la primera es la proposición primera del libro décimo de los *Elementos* de Euclides[8] y la proposición segunda es el Lema I de la "Sección Primera. Sobre el método de las primeras y últimas razones de cantidades"

8 "Proposición 1 Dadas dos magnitudes desiguales si se quita de la mayor una (magnitud) mayor que su mitad y de la que queda una magnitud mayor que su mitad y así sucesivamente, quedará una magnitud que será menor que la magnitud menor dada." EUCLIDES (1996, 12).

de los *Principios matemáticos de la Filosofía natural* de Newton[9], con pequeñas variaciones en su redacción.

En su opinión, la primera afirmación es válida, pero no es aplicable en este caso porque la diferencia no llega a ser cero y en la aproximación con infinitésimos al final se anula. La segunda proposición para Berriz es contradictoria porque al mismo tiempo dice que dos cosas admiten una diferencia y que son iguales. Pero incluso, si en algún caso llegara a ser cierta y llegaran a ser iguales las dos cantidades, no puede serlo en el caso que se estudia porque una sería curva y la otra recta y es imposible que sean iguales.

Estos errores en las definiciones, piensa Berriz que se pueden extender a todo el cálculo diferencial:

> *"66. Todos saben que el cálculo diferencial es el método de introducir en las expresiones algebraicas unos signos que las hagan representar una parte infinitamente pequeña de la cantidad que representan, y el cálculo integral el que enseña a sumar todas esas partes; y todos saben también que los recursos que se toman para la diferenciación envuelven suposiciones falsas quales son apreciar y calcular como semejantes triángulos de quienes uno es un verdadero triángulo rectilíneo y otro una figura mixtilínea, de modo que todo va a parar a suponer que una cuerda es igual a su arco subtenso; por consiguiente lo que la diferencial expresa nunca es un arco sino su cuerda."*

Incluso cuando menciona las expresiones algebraicas introduce el triángulo característico y sigue razonando desde la geometría.

### 3.1.- Consecuencias de su conclusión.

Partiendo de que los métodos utilizados hasta entonces daban valores menores a los reales, los resultados obtenidos por Arquímedes, Mecio u otros debían ser erróneos. Pero eran resultados bien admitidos en matemáticas y se ve en la obligación de hacer algunos comentarios sobre ellos.

Arquímedes llega a sus valores aproximando la circunferencia con polí-

9 "Lema Primero. Las cantidades, y las razones de cantidades, que en cualquier tiempo finito tienden continuamente a la igualdad, y antes de terminar ese tiempo se aproximan una a otra más que por ninguna diferencia dada, acaban haciéndose en última instancia iguales" NEWTON (1987, 61).

gonos inscritos y circunscritos con un número de lados cada vez mayor. Si la afirmación de Berriz fuera válida, el perímetro de la circunferencia debería ser mayor también al de los polígonos circunscritos a partir de un número suficientemente grande de lados y Berriz no duda en afirmarlo: "el perímetro del polígono de infinito número de lados circunscrito a un círculo es menor que la circunferencia rectificada". Acepta que esto resulte sorprendente; pero dice que, como la tangente decrece más rápidamente que el arco (lo que demuestra tomando ángulos de 64º a 1º, cada uno la mitad del anterior, y viendo como las tangentes disminuyen más rápido que los ángulos) concluye que "por tanto es evidente que a un cierto número de operaciones vendrá a ser igual el arco a la tangente y a la operación siguiente menor la tangente que el arco lo cual ha de suceder antes que el número de operaciones sea infinito". Berriz no tiene en cuenta que, si una sucesión es mayor que otra y disminuye más rápidamente que ella, no es forzoso que deje de ser mayor y pase a ser menor en algún momento, ya que puede seguir siendo siempre mayor, aunque su diferencia tienda a cero como sucede con un arco y su tangente cuando el primero tiende a cero.

Si el círculo se toma como una infinidad de sectores de base infinitesimal, que pueden tomarse como triángulos, se deduciría fácilmente que su área es proporcional al radio al cuadrado. Berriz no puede admitir esa hipótesis y se niega a aceptar el resultado. Acepta como probado que las áreas de los polígonos regulares van como los diámetros al cuadrado, pero, como los círculos no son polinomios de infinitos lados y siempre queda un residuo entre los arcos y los lados del polígono, "no puede decirse que están en la razón de los quadrados de sus diámetros". Esa afirmación va en contra de la proposición segunda del libro duodécimo de las *Elementos* de Euclides[10], que está demostrada por el método de exhaución sin utilizar infinitésimos, y debería haber servido a Berriz para recapacitar y corregir su planteamiento. Pero, en lugar de aceptar que había llegado a un resultado absurdo, Berriz lo generaliza y dice que "las superficies curvilíneas no pueden jamás reducirse a rectilíneas" y por tanto es imposible cuadrarlas. Lo justifica diciendo que para transformar una figura en otra de igual área se opera con sus ángulos[11]. Pero como la circunferencia no tiene ángulos "ni su naturaleza los admite, luego no es

10 "Proposición 2 Los círculos son uno a otro como los cuadrados de sus diámetro" EUCLIDES (1996, p. 268).

11 Probablemente se refiera a las proposiciones 34 a 45 del libro primero de los *Elementos* de Euclides en las que se estudia la transformación de unas figuras rectilíneas en otras.

transformable en otra que los tenga, ni hay de donde nazcan los ángulos de esta", de donde deduce que un círculo no se puede reducir a un cuadrado, luego es "Inconmensurable" con los cuadrados, como los irracionales lo son con los enteros. Concluye: "61. Síguese de lo dicho que el problema de la Cuadratura del círculo (como el de todas las curvas) es irresoluble". Es decir, ni siquiera aceptaría el cálculo del área de las lúnulas de Hipócrates de Quíos admitido ya en el s. V a.C.

De esas afirmaciones radicales cabría esperarse que tampoco aceptara la rectificación de la circunferencia; pero sostiene que la razón del diámetro a la circunferencia es independiente del problema del área del círculo y que se han equivocado quienes han pensado que están relacionados y "haré ver en qué ha estado esta equivocación que es hija de otra de las consecuencias de la aplicación de la teoría de los infinitamente pequeños".

### 3.2.- El cálculo de π.

En la tercera parte del dosier enviado al Colegio de Artillería trata de hallar el valor de $\pi$: "Problema. Determinación de la razón del diámetro a la circunferencia del círculo". Este apartado tiene 8 proposiciones. Comienza por fijar la mayor cota de Arquímedes para $\pi$ (22/7) como la menor cota para su cálculo de $\pi$, de acuerdo con su razonamiento anterior. En sus proposiciones solo utiliza la geometría elemental y la trigonometría, y no emplea en ningún momento el cálculo infinitesimal. Los errores que tiene son muy burdos y no merece la pena reseñarlos. Concluye que la razón de la circunferencia al diámetro es aproximadamente 45 a 14 (que es $\pi = 3{,}2142857142...$) y si se quiere más precisión, por ejemplo en astronomía, se puede tomar 2253 a 700 (que es $\pi = 3{,}21857142857…$). Dos resultados muy erróneos.

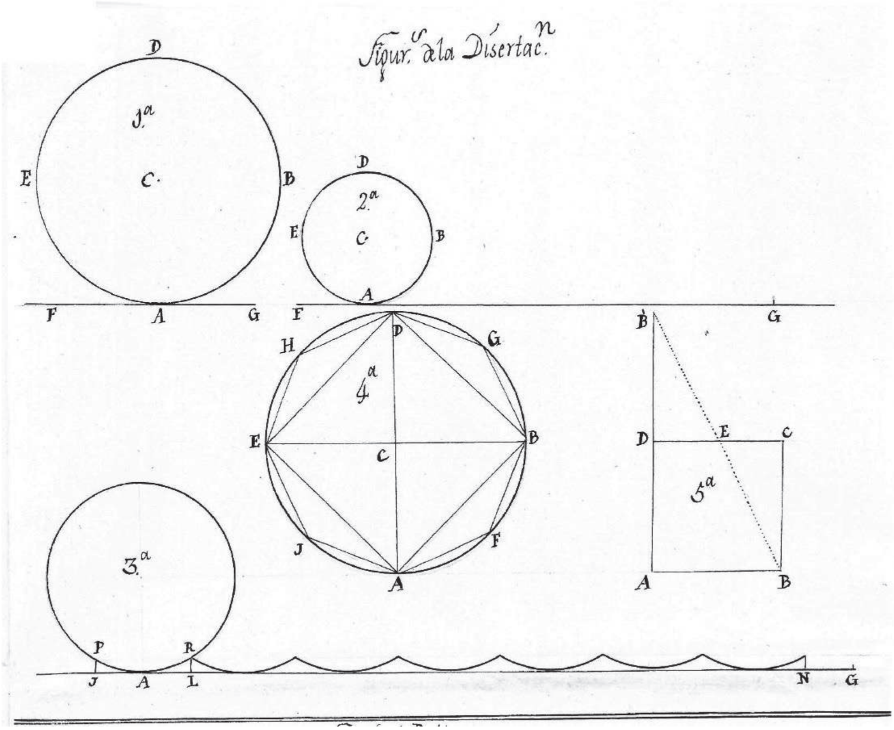

Figura 1. Figuras del apartado "Disertación", del dosier "Disertación sobre la naturaleza de las líneas curvas y determinación de la razón del diámetro a la circunferencia"

**4.- El cálculo diferencial en el Colegio de Artillería de Segovia.**

Berriz estudió en el Colegio de Artillería de Segovia por lo que se puede comparar lo que propone con lo que se explicaba en dicho Colegio. El cálculo diferencial lo cursó en el primer semestre del tercer curso. No se han localizado los apuntes de clase de Berriz, pero su profesor Pedro Giannini publicó sobre la materia el tomo III del *Curso Matemático* (Giannini, 1795) con el que pueden compararse sus afirmaciones; además se conservan los apuntes de clase de cadete Tomás Eslava que cursó esa asignatura cuatro años antes que Berriz y sirven para confirmar que esos temas se explicaban en clase en el Colegio de Artillería.

Sobre los infinitésimos se dice en el libro de Giannini:

> *"Las diferencias menores que cualquier cantidad dada, o las diferencias evanescentes de las cantidades variables, se llaman Diferenciales, Elementos Infinitésimos, y también Fluxiones de las mismas cantidades variables; y dichas cantidades variables se llaman Sumas, Integrales, y también Fluentes respecto a las cantidades evanescentes."*[12]

Las diferencias con la definición de Berriz no son muchas, pero sí son muy significativas. Giannini ha definido antes lo que es variable y función. En su definición, además de estar la idea de cantidad muy pequeña está la idea ser variable y evanescente, lo que evoca la idea de límite. Giannini insiste en que son cantidades variables. Berriz en lo que insiste es en que por pequeñas que sean no pueden dejar de tener las características de la línea que se trate, el que disminuyan más o menos para él es secundario y que se desvanezcan, le parece imposible.

Introducir la idea de variable antes de definir infinitésimo e incluir en la definición que un infinitésimo es una variable que se hace muy pequeña es corriente en el siglo XVIII. Así lo hace L'Hôpital[13], por ejemplo. Parece difícil definir infinitésimo sin la idea de variación, límite o evanescencia. Definirlo como infinitamente pequeño solamente sin la idea de variación lleva a los problemas que plantea Berriz.

En cuanto a la definición del cálculo diferencial, Giannini dice en su tratado que:

> *"46. Cálculo Diferencial se llama el método de hallar las diferenciales de las cantidades variables propuestas.*
> *47. Cálculo Integral se llama el método de hallar las sumas o integrales de las diferenciales propuestas."*[14]

Para Giannini el cálculo diferencial es hallar expresiones con diferencia-

12 GIANNINI (1795, 35). ESLAVA (1781) tiene en sus apuntes: "Las diferencias menores que cualquier cantidad dada, o las diferencias evanescentes de las cantidades variables, se llaman Diferenciales, Elementos Infinitésimas, y también Fluxiones; y las cantidades variables se llaman Sumas, Integrales, y Fluentes respecto a las cantidades evanescentes." Lo que no es muy diferente a lo que luego figuró en el libro.

13 L'HÔPITAL (1696, 1-2) primero define cantidad variable y luego dice: "Définition II La proportion infiniment petite dont une quantité variable augmente ou diminue continuellement, en est appelé la Différence".

14 GIANNINI (1795, 42). También está en ESLAVA (1781).

les a partir de una expresión algebraica que no las tiene. La idea que tiene Berriz de cálculo diferencial como expresiones algebraicas con diferenciales para Giannini son fórmulas que provienen de la diferenciación de cantidades variables o expresiones que surgen del estudio de curvas o en mecánica y que, normalmente, se trata de integrar.

Los dos lemas que presenta Berriz como fundamentos de la teoría de los infinitésimos, que, como se ha dicho son la proposición primera del libro X de los *Elementos* de Euclides y el lema I de los *Principios matemáticos de la Filosofía natural* de Newton, no están en el tomo III de Curso Matemático de Giannini, que trata de cálculo diferencial e integral, sino en el tomo I que trata de geometría. La primera parte de ese tomo es una versión de los *Elementos* de Euclides, con algunas variaciones. Entre otras, en el libro XII que trata de la superficie de la circunferencia y del volumen de esferas, conos y cilindros, simplifica las demostraciones, que en el original de Euclides se hacen por el método de exhaución, utilizando la idea, más próxima al cálculo diferencial, de figuras inscritas en otra que degeneran en ella, que popularizó Andreas Tacquet. Giannini dice en el tomo I[15]:

> *"Libro XII*
> *Lema I*
> *428. Dadas dos magnitudes desiguales AB, DF, si de la mayor AB se quita una parte mayor que su mitad, y del residuo otra parte mayor también que su mitad, y así succesivamente; llegará a resultar una parte menor que la magnitud menor propuesta DF." […] /*
> *[...] Lema II Las magnitudes y las razones de las magnitudes que continua y constantemente se acercan à la igualdad de suerte que su diferencia venga a ser menor que cualquier diferencia dada finalmente son iguales".*

La redacción del lema II de Giannini tiene una diferencia notable con el Porisma Universal que planteaba Tacquet en su Geometría[16]:

15 GIANNINI (1779, 215-216). También está en ESLAVA(1781).

16 TACQUET (1683, 258). En castellano FERNÁNDEZ E MEDRANO (1688, 309): "PORISMA ó THEOREMA Universal. Si las figuras que se inscrivieren (en A, B,) desgeneran en ellas, la razon que tubieren siempre las inscritas, tendràn las figuras en las quales estubieren inscritas", aunque no diga que traduce a Tacquet.

> *"Porisma Universal*
> *Si ea, quæ duabus figuris (A, B) inscribuntur, in ipsas desinant, quam proportionem inter se semper habent inscripta, eandem habent & figuræ."*

Para Tacquet son figuras las que degeneran. Giannini, o Newton, habla de magnitudes en lugar de figuras, porque tiene una visión más algebraica del problema y este porisma se va a utilizar para calcular áreas y volúmenes, es decir, cantidades. Berriz habla de magnitudes, como Giannini, pero para él los infinitésimos son figuras como en Tacquet y profundiza en la idea lo que no hace el matemático flamenco[17]. Variables, cantidades numéricas y evanescencia, o tender a cero, entran en la definición de Cauchy de "quantités infiniment petites"[18]. Con infinitésimos que son figuras que pueden ser muy pequeñas, pero nunca llegan a anularse, como hace Berriz, parece difícil llegar a algún resultado válido.

El lema II de Giannini es el mismo que pone en el tomo III[19] cuando introduce el cálculo diferencial. Ese lema es prácticamente una traducción al castellano del que da Newton en los *Principia*[20]. Giannini no lo dice en el tomo I de su Curso, pero en el tomo III lo indica en el título del apartado:

> *"Introducción en la qual se exponen e ilustran con ejemplos y escolios los Lemas Newtonianos de las razones primeras y últimas, que contienen los principios geométricos de los Cálculos diferencial e integral"*[21].

Berriz en su disertación no cita a Newton. Como los profesores en su crítica le dicen que Newton dejó bien definidas estas cuestiones, cuando responde a sus críticas les dice, sobre Newton y los *Principia,* que:

17 Sobre la noción de límite como noción aritmética y no geométrica ver BOYER (1959, 272-273).

18 "On dit qu'une quantité variable devient infiniment petite, lorsque sa valeur numérique décroit indéfiniment de manière à converger vers la limite zéro" [CAUCHY (1821, 26].

19 GIANNINI (1795, 1).

20 "LEMMA I. Quantitates, ut & quantitatum rationes, quæ ad æqualitatem dato tempore constanter tendunt & eo pacto propius ad invicem accedere possunt quam pro data quavis differentia; fiunt ultimo æquales." (NEWTON, 1687, 26). En castellano "LEMA PRIMERO Las cantidades, y las razones de cantidades, que en cualquier tiempo finito tienden continuamente a la igualdad, y antes de terminar ese tiempo se aproximan una a otra más que por ninguna diferencia dada, acaban haciéndose en última instancia iguales." NEWTON (1987, 61).

21 GIANNINI (1795, 1).

*"Me hice cargo de los lemas en que Newton funda su teoría y dije de ellos lo que tomados en abstracto y contraídos a la práctica, me ocurrió: apunté algunos de los errores que ha ocasionado el creer demostraciones las que miradas a la luz que yo las miro, no lo son"*[22].

Es decir que no duda en criticar también a Newton. Los razonamientos de Berriz indican que no conocía la aplicación del cálculo diferencial al estudio de la curvatura, del círculo osculador o del radio de curvatura. Giannini explica esas cuestiones en la "Proposición XLV" (Giannini, 1795, 277) en la que define el "radio del ósculo", esto es el radio de curvatura, y el "circulo osculador". También define Giannini diferenciales de orden superior, otra cuestión que Berriz ignora[23].

De todo lo anterior se deduce que Berriz no estudió debidamente el curso de cálculo diferencial e integral en el Colegio de Artillería. Confirma esa suposición el que en esa evaluación no aparezca calificado junto a sus compañeros.

## 5.- La crítica de los profesores del Colegio de Artillería de Segovia.

Los documentos fueron enviados por los conductos reglamentarios y llegaron a Segovia el 22 de septiembre de 1798. Los profesores respondieron oficialmente tres meses más tarde, el 21 de diciembre. El escrito está firmado por todos los profesores del Colegio[24], incluso los de artillería o fortificación, lo que parece debido a que la valoración fue una petición del Inspector General de Artillería llegada por vía oficial.

El texto es muy breve, dos caras escasas sin ninguna figura. La crítica de los profesores se dirige principalmente a la "Disertación" y no se detiene en aspectos concretos, sino que niega en general la validez de los reparos de Berriz al cálculo diferencial o a sus aplicaciones:

22 Berriz en la Carta respuesta a la valoración de los profesores del Colegio, Sevilla 21 de enero de 1799 (AGMS, Hojas de servicio B-2130).

23 GIANNINI (1795, 35). También está en ESLAVA (1781)

24 Firman Pedro Giannini, primer profesor encargado de cálculo diferencial y mecánica, Isidoro Gómez, segundo profesor de álgebra, Cándido Elgueta, de geometría, José Bergara, de aritmética, Antonio Elgueta, de fortificación, Rafael Pessino, de dibujo y Diego Navarro Sangrán, de artillería.

> *"Desvanecieron las dudas acerca de la exactitud de los cálculos superiores al aparecer la obra de los principios matemáticos de Newton, donde funda el referido método sobre una base inalterable, cual es el Lema primero y las teorías establecidas sobre el mismo método, y aplicadas aun al movimiento de cuerpos tan distantes de la Tierra con tanta aproximación a las observaciones, fueron la admiración de todos los pueblos"*[25].

Los profesores del Colegio de Artillería se muestran más convencidos de la corrección de las bases teóricas que dio Newton al cálculo diferencial que sus contemporáneos Lagrange o D'Alembert. Para ellos, los principios están bien establecidos y los excelentes resultados obtenidos al aplicarlos a los movimientos celestes los confirman.

Creen que los errores de Berriz se debían a que en la isla de Trinidad no tenía buenas condiciones para avanzar en matemáticas y por eso hacía esas afirmaciones erróneas "así por lo que pertenece al método geométrico de las razones primeras y últimas de Newton, o de la exhausción de los antiguos". No dudan que en Sevilla dedicará sus esfuerzos al "adelantamiento de dichas theorias" y "dejará de investigar la razón del diámetro de la circunferencia del círculo".

Respecto a su cálculo del valor de $\pi$ dicen que "la proposición primera no queda demostrada" porque el ángulo al que se refiere dicha proposición está dado "sin la ley fixa" y sin demostrar "que disminuya continua y constantemente", pero sin concretarlo más y sin criticar las siguientes proposiciones.

El 21 de enero de 1799, Berriz contestó diciendo que no ignoraba la obra de Newton y que para estar "impuesto en los principios en que Newton funda su teoría de los infinitamente pequeños, que es la obra que los Sres. Profesores citan, me bastaba haber estudiado en la Academia del cuerpo los cálculos superiores, como consta a los mismos Sres. Profesores; pude muy bien hacerme cargo en mi disertación, como lo hice, de los Lemas fundamentales de dicha teoría". Sobre las críticas que le habían hecho al cálculo de $\pi$ sólo corregía alguna cuestión secundaria de las criticadas.

Con la carta de los profesores de 23 de febrero de 1799, en la que decían que esas correcciones no variaban su valoración negativa, terminó la cuestión.

25 Carta de los profesores del Colegio de Segovia al conde de Revillagigedo de 20 de diciembre de 1798 (AGMS, Hojas de servicio B-2130).

## 6.- La cuadratura de Berriz en su época.

Muchos matemáticos trataron del problema de la rectificación de la circunferencia o de la de la cuadratura del círculo utilizando los nuevos métodos del cálculo infinitesimal en el siglo XVIII. Montucla dedica al estudio del problema de la cuadratura con métodos infinitesimales el capítulo IV:

> *"Chapitre IV. Des découvertes faites sur la mesure du cercle, à l'aide des nouveaux calculs, ou l'on esquisse, par occasion, l'histoire de la naissance du calcul intégral"*[26].

El capítulo comienza con la aproximación al valor de $\pi$ formulada por Wallis, y luego comenta diversos métodos propuestos por Newton, Brouckner, Euler, Leibniz, Gregory o Jean Bernoulli. En todos se utilizan sucesiones, series o fracciones continuas, para hallar valores aproximados, buscando facilitar lo más posible el cálculo de esas aproximaciones de $\pi$. Considera en particular Montucla los resultados obtenidos calculando a partir del desarrollo en serie del arco de tangente por Lagny, Sharp, Machin o Simpson. En todos los casos son métodos aproximados y algebraicos, no se buscan cuadraturas exactas, ni geométricas.

Giannini, en el tomo tercero de su *Curso*, también calcula el valor de $\pi$ partiendo de la serie de arco tangente tomando el valor 1 que corresponde a 45º y calculando con diez decimales halla un valor con once cifras, nueve exactas, y da la fórmula de la longitud de la circunferencia en función del radio. Da también un valor de $\pi$ con 128 cifras, probablemente tomado de Lagny (Giannini, 1795, 107-111). Pero esa parte del libro no debieron explicarla en clase, al menos no lo hicieron en 1781 (Eslava, 1781).

En cuanto a la posibilidad de obtener valores exactos, en 1766 Johann Heinrich Lambert demostró que el número $\pi$ es irracional usando el desarrollo en fracción continua de la función tangente por lo que la falsedad de los resultados fraccionarios como los que da Berriz estaba ya demostrada en general. La demostración de que es trascendente resultó más difícil y no se consiguió hasta 1882, cuando Ferdinand Lindemann la logró.

26 "Capítulo IV. Descubrimientos realizados sobre la medición del círculo, utilizando los nuevos cálculos, donde esbozamos, aprovechando la ocasión, la historia del nacimiento del cálculo integral" MONTUCLA (1754, p. 104-212).

Por todo eso se entiende bien que los profesores del Colegio de Artillería no se molestaran en hacer un análisis exhaustivo de la propuesta de Berriz. Era muy evidente que estaba mal y ese tipo de razonamientos eran menospreciados. La Académie des Sciences de París ya había declarado en 1775:

> *"L'Académie a pris, cette année, la résolution de ne plus examiner aucune solution des problèmes de Ia duplication du cube, de la trisection de l'angle ou de la quadrature du cercle, ni aucune machine annoncée comme un mouvement perpétuel"*[27].

Sin embargo, los profesores del Colegio de Artillería no podían negarse a valorar una propuesta que venía del Inspector General del arma.

Por otra parte, el que llegara de forma oficial este escrito al Colegio de Artillería es una indicación de que a finales del siglo XVIII se conocía la existencia del cálculo diferencial y era considerado un avance importante en círculos ilustrados en España. La cuadratura del círculo era un problema atractivo, pero su dificultad era conocida y la solución de Berriz es una de las muchas erróneas que hubo basándose en conocimientos de geometría elemental, por lo que no debía haber sido tan considerada. Berriz consiguió que el Gobernador de Trinidad organizara un acto público en el que presentó la solución que había encontrado. Según dice Berriz, al acto asistió el mismo gobernador José María Chacón y Sánchez de Soto, con anterioridad oficial de la armada, el jefe de la flota que había acudido a defender la Isla, Sebastián Ruiz de Apodaca, el capitán de fragata, Joseph Caro, dos ingenieros militares y otras personas interesadas. Para reunir los personajes más importantes de la isla debió de ser un acto notable. Una vez en Sevilla dice en la carta al inspector general de artillería que la existencia de su solución era ya conocida entre los militares de Cádiz y Sevilla por las noticias que habían dado los marinos de vuelta del Caribe. La presentación con una larga crítica al cálculo diferencial debió impresionarles, y también al Inspector General, porque muy rara vez la Inspección de artillería encargó la resolución de una cuestión matemática al Colegio. El Inspector General, conde de Revillagigedo, fue un

27 "La Academia ha tomado este año la decisión de no examinar ninguna otra solución de los problemas de duplicación del cubo, trisección del ángulo o cuadratura del círculo, ni a ninguna máquina anunciada como de movimiento perpetuo". En la reedición de esta obra de Montucla, que hizo en 1831 Silvestre François Lacroix, se incorporó esa declaración como una nota adicional a la p. 110 del original, que está en la p. 279.

personaje ilustrado, famoso por su actuación como virrey de Méjico, donde fundó la Real Escuela de Minería por lo que las cuestiones científicas no le debían ser totalmente ajenas. Estos personajes debieron considerar el trabajo de Berriz interesante, pero no pusieron mucho empeño en entenderlo. Parece difícil de creer que oficiales de la armada, de artillería o de ingeniería militar que estudiaran con seriedad la propuesta no fueran capaces de descubrir los muchos errores de Berriz en su cálculo de π.

## 7.- Bibliografía.

### Manuscritos

- Hoja de servicio de Vicente Berriz en el Archivo General Militar de Segovia (AGMS). Hojas de servicio Sección 1ª legajo B-2130.
- *Actas del Colegio Militar de Caballeros Cadetes del Real Cuerpo de Artillería 1765-1787* (2 v.). Biblioteca de la Academia de Artillería de Segovia.
- ESLAVA, Tomás (1781) *Elementos de los cálculos diferencial è integral.* Manuscrito. Tudela de Navarra. Biblioteca Pública Yanguas y Miranda.

### Impresos

- BOYER, Carl B. (1959) *The history of the Calculus and its conceptual development*, New York, Dover. Primera edición en 1949.
- BERRIZ, Vicente (1815) *El equilibrio absoluto: Sistema del Universo*, Sevilla, Real Acuerdo.
- CAJORI, Florian (1993) *A history of mathematical notations,* Nueva York, Dover. Primera edición en dos volúmenes 1928, 1929.
- CAUCHY, Agustin-Louis (1821) *Cours d'Analyse de l'École Royale Polytechnique*, París, Imprimerie Royale.
- EUCLIDES (1996) *Euclides Elementos Libros X – XIII,* Madrid, Gredos, Biblioteca Clásica (edición de María Luisa Puertas Castaños).
- FERNÁNDEZ DE MEDRANO, Sebastián (1688) *Los seis primeros libros, onze, y doze de los Elementos de Euclides Megarense*, Bruselas, Lamberto Marchant.
- GIANNINI, Pedro (1779) *Curso Matematico para la enseñanza de los caballeros cadetes del Real Colegio Militar de Artilleria. Por Don Pedro Giannini,*

*Profesor Primero de dicho Colegio,* Tomo I. Madrid, Joachin Ibarra.
- GIANNINI, Pedro (1795) *Curso Matemático para la enseñanza de los caballeros cadetes del Real Colegio Militar de Artillería. Por Don Pedro Giannini, Comisario de Guerra de los Reales Exércitos, Profesor primero de dicho Colegio* Tomo III, Segovia, Antonio de Espinosa.
- GIL NOVALES, Alberto (2010) *Diccionario biográfico de España. Tomo I - A/F (1808-1833) De los orígenes del liberalismo a la reacción absolutista*, Madrid, Fundación MAPFRE, 403-404.
- L'HÔPITAL, Guillaume (1696) *Analyse des infiniment petits, pour l'intelligence des lignes courbes*, Paris, l'Imprimerie Royale.
- MONTUCLA, Jean Etienne (1754) *Histoire des Recherches sur la Quadrature du Cercle. Ouvrage propre à instruire des découvertes réelles faites sur ce problème célèbre & á servir de préservatif contre de nouveaux efforts pour le résoudre,* París, Jombert. Reedición corregida en 1831, Bachelier, París.
- NEWTON, Isaac (1987) *Principios matemáticos de la Filosofía natural*, Madrid, Tecnos (Estudio preliminar, traducción y notas de Antonio Escohotado). Primera edición en latín 1687.
- NEWTON, Isaac (1687) *Philosophiae naturalis principia mathematica,* Londres, Jussu Societatis Regiae.
- TACQUET, Andrea (1683) *Elementa Geometriæ planæ ac solidæ, quibus accedunt selecta ex Archimede Theoremata […] editio nova*, Amsterdam, Henricum Wetstenium. La primera edición es de 1656.